

© 2012 г. Е.В. Черепанов
УДК 336

К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ КАТЕГОРИЯМИ ПОТРЕБЛЕНИЯ И ПРОИЗВОДСТВА

Маркетинг потребительских рынков имеет две составляющие. Во-первых, нужно *точно* знать, чего ждет от товара покупатель. Анализ покупательского спроса реализуется социологическими методами. В работе подробно излагается математически строгая методология статистической обработки данных, получаемых на *случайных* выборках респондентов. Этот подход, радикально отличаясь от традиционных «квотных» методов социологии, значительно повышает точность и информативность результатов маркетинговых обследований ожиданий покупателей [1]. Кроме того, предприниматель (продавец) должен объективно исследовать микроэкономические параметры рынка. Настоящую работу автор рассматривает как обоснование некоторого нового подхода, идея которого была впервые предложена в работе [2], к анализу потребления в его взаимосвязи с производством (торговлей).

Базовые понятия современной микроэкономики были заложены в середине XIX в. У.С. Джевонсом [3,4] и Ж. Дюпюи [5]. У.С. Джевонс в 1862-66 гг. ввел понятия *полезности* товара («*Полезным предметом* является тот, который вызывает удовольствие либо уже имеющийся от него пользой, либо ожиданием его будущей пользы» [3]) и его *ценности* («*Количество полезности* (т.е. «ценность» – авт.) соответствует количеству произведенного удовольствия» [4]). По сути, в своих работах У. Джевонс фактически заложил основу «теории обмена, которая является следствием теории полезности» [3]. В современном понимании, *полезность товара* – это его способность удовлетворять разовые («услуги») или длительные (собственно «товар») потребности покупателей. А *потребности* – это необходимость или желание покупа-

теля получить некоторые *блага*, связанные со свойствами приобретаемого товара. Но что такое «*благо*»?

Проблему «человеческого блага» всесторонне изучил еще Аристотель: «...поступок и сознательный выбор, как принято считать, стремятся к определенному благу... Видимо, не безосновательно считать, что благо и счастье люди представляют себе исходя из собственного образа жизни... Но ясно, что «*благо*» не может быть чем-то всеобъемлюще общим и единым... Следовательно, «*благо*» как нечто общее, объединенное одной идеей, не существует» [6]. Отметим, что к подобным выводам позже приходили многие лица. Скажем, С. Моэм заметил, что «...какие бы цели не ставил человек – он заблуждается, ибо у человека не может быть иных целей, кроме собственного удовольствия»¹. Если «*удовольствие*» понимать достаточно широко, как удовлетворение любого рода потребностей человека, то мысль (или шутка?) С. Моэма, вообще говоря, совершенно не противоречит выше приведенным рассуждениям гениального античного мыслителя.

Согласимся, что каждый покупатель стремится удовлетворить некоторые свои *потребности*, получить *благо*, т.е. нечто, что он связывает с его *удовлетворением*, исходя из социальных представлений, своего личного образа жизни или нужды. Стремление покупателя сдерживаются имеющимися у него финансовыми возможностями. Таким образом, реализуется механизм *приобретения блага*. В таком же ключе высказался Дж. Винер: «Допустим пока, что благосостояние есть поток полезности, а полезность означает удовлетворение. Экономисты могут принять удовлетворение как количество, не занимая никакой позиции по отношению к его этическому качеству. Какова бы ни была сущность благосостояния, все согласны с тем, что для человека она скорее субъективная и внутренняя, чем объективная и внешняя» [7].

В своей совокупности желание и возможность потребителя приобрести данный товар по заданной цене образуют его *индивидуальный спрос*. Суперпозиция индивидуальных спросов покупателей данного рынка образует потребительский (совокупный) спрос. *Потреблением* данного товара будем называть *фактическую реализацию потребительского спроса* на этот товар за единицу времени. Исследование взаимосвязи *потребительского* спроса на

¹ Сомерсет Моэм. Луна и грош // Моэм У.С. Собрание сочинений в 5 т. Т. 2. М., 1997.

товар с его производством является предметом обсуждения в настоящей публикации.

Заметим, что при изложении основ микроэкономики, часто, как кажется, излишнее внимание уделяют *индивидуальному* спросу. Такой подход оправдан лишь в тех случаях, когда это делается в целях разработки наиболее эффективных способов продвижения новых товаров на новые рынки [8]. В этой связи Дж. Винер в классическом обзоре работ по теории ценности [9] писал: «Критики иногда считали само собой разумеющимся, что экономисты вывели свой закон убывающей полезности из психологического закона Вебера – Фехнера... Я не могу найти ни малейшего подтверждения тому, что ранние теоретики полезности когда-либо слышали об этом законе... Закон убывающей полезности был разработан экономистами на основании их собственных наблюдений, а не заимствован из психологии». И далее: «Многие теоретики исследовали психологические предпосылки объективного рыночного спроса, так как хотели пролить свет на характер и происхождение спроса, а не потому, что они интересовались психологией потребителя как таковой. Я не нахожу в работах ранних теоретиков полезности подтверждения тезиса многих критиков, что они считали свою теорию готовой взаимодействовать с современной психологией и использовали психологические учения в качестве главных предпосылок, от которых берет начало априори их теории цены» [9]. Законы потребления в реальности определяются психологическими законами. Но, пока эти законы известны лишь в «описательном виде», мы, по примеру «ранних теоретиков полезности», будем опираться на экономические представления.

1. Спрос на потребительском рынке одного товара

Вначале рассмотрим потребительский рынок одного товара, поставляемого одним продавцом и потребляемого совокупным покупателем (монопольный рынок). Такое упрощение реальных рыночных отношений позволяет понять и описать основные экономические категории, определяющие рынок как таковой.

В зависимости от цены товара p , образуется *спрос на товар n* . Возникает кривая спроса $n = n(p)$, под которой априори понимается *монотонно убывающая* функция. Фактически *реализованный* (за единицу времени) *спрос* – будем рассматривать (и называть) *потреблением* товара.

Пусть в течение единицы времени цена на данный товар была постоянна и равна p . За это время совокупный покупатель приобрел n единиц товара. Тогда *стоимость* V приобретенного товара равна $V = n p$ (1.1)

Стоимостные величины мы будем измерять в единицах денег (для определенности - \$), а количество товаров в «штуках» (кг, баррель, эшелон и т.п.), которое обозначим I . Размерность цены будет иметь вид $[p] = \$ / I$.

Было бы проще оговорить количество товара как безразмерную величину, что вполне допустимо и упростило бы последующие математические выкладки. Но нормировка вида $\$ / I$ имеет более глубокий смысл. Так мы конкретизируем смысл предельных величин (для полезности, потребительского излишка и др.), избегая использования операции предельного перехода к нулю, которая не всегда правомерна в экономике. Если посмотреть на проблему глубже, то придется рассматривать вопрос об измеримости [10] категорий теории спроса и производства, т.е. вопрос о возможности их представления *числом*².

Часть покупателей была готова заплатить за купленный товар более высокую цену, чем p . В результате образовался *потребительский излишек* W . Эта категория была введена Ж. Дюпюи [5]: «Окончательная полезность продукта («*потребительский излишек*» – авт.) выражается в виде разности между жертвой, которую покупатель согласен принести, чтобы приобрести этот продукт, и покупной ценой, которую он должен заплатить за него». Мера полезности товара всегда определяется рынком, Ж. Дюпюи подчеркивал, что «в торговле цель всегда одна: заставить оплачивать за товары и оказанные услуги не их истинную ценность, а ту ценность, в которую покупатель оценивает эти услуги... Реальна та полезность, которую покупатели согласны оплачивать» [5].

² В древнегреческой натурфилософии любое *число* рассматривалось как некоторое *количество естественных «единиц»*. После работ Р. Декарта (подробнее см. [11]), переосмыслившего античную математику, описанную в «Началах» Евклида, изменился сам смысл понятия «число». Это первым отметил И. Ньютон, писавший, что «под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отношение некоторой величины к другой величине того же рода, *принятой* (курсив мой. – авт.) нами за единицу» («Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе»). Любопытно, что понятие числа «нуль» для древнегреческих математиков было нонсенсом. Так же бессмысленны для них были понятия математической точки, линии нулевой толщины и т.п. Соответственно, «нуль» и связанные с ним понятия в книгах «Начал» Евклида вообще отсутствуют.

Как экономическая категория потребительский излишек выражает разность между максимальной суммой U (ценность товара), которую совокупный покупатель готов был заплатить за данный объем данного товара, и его фактическими затратами на его приобретение V .

Отсюда понятно, что *потребительский излишек* (или *излишек потребителя*) является мерой выгоды совокупного покупателя. Ясно, что, поскольку цена может быть любой положительной величиной, продавец «недополучил» сумму

$$W(p) = \int_p^{\infty} n(x) dx \quad (1.2)$$

$$\text{Из (1.2) следует, что потребление равно } n(p) = -W'_p \quad (1.3)$$

Общепринято считать, что кривая спроса (и, следовательно, потребление) монотонно убывает с ростом p . Поэтому существует биекция между n и p . Представим (1.2) в виде

$$W(n) = -np(n) + \int_0^n p(x) dx \quad (1.4)$$

$$\text{У. Джевонс [3,4] ввел понятие ценности товара } U = V + W \quad (1.5)$$

равной сумме стоимости товара и потребительского излишка. Под величиной ценности U фактически понимается *полезность товара, выраженная в деньгах*.

$$\text{Из соотношений (1.4-5) следует, что } U(n) = \int_0^n p(x) dx \quad (1.6)$$

$$\text{Откуда непосредственно получаем, что } p(n) = U'_n \quad (1.7)$$

т.е. в одномерном случае (монопольный рынок) предельная полезность товара равна его цене. Ценность товара служит денежной мерой полезности товара, позволяя численно сопоставить количество различных товаров при их обмене.

2. Цены и потребление на многотоварном конкурентном рынке

Рассмотрим многотоварный рынок из m видов конкурирующих товаров. Пусть j -й товар куплен в объеме n_j . Смысл монотонно возрастающей (и выпуклой вверх) *функция ценности* $U(n_1, \dots, n_m)$ состоит в том, что набор товаров обладает определенной *полезностью* (или *ценностью* – выражением полезности в деньгах). Деньги выступают как единая шкала измерения полезности, позволяющая сравнивать ценность товаров различной природы.

Под *потребительской ценой* p_j j -го товара будем понимать *среднестатистическое* отношение количества отданных за него денег V_j к количе-

ству приобретенного товара n_j . *Спрос* – это векторная функция $\vec{n}(\vec{p})$ от вектора цен \vec{p} . Спрос определяет количество разных видов (марок) товаров, представленных на потребительском рынке, которое совокупный покупатель хочет и может приобрести в заданных условиях *за единицу времени*. Функцией *потребления* назовем векторную величину количества *реально* покупаемых товаров от вектора цен, т.е. потребление – это реализованный спрос.

$$\text{Стоимость } j\text{-го товара имеет вид } V_j = p_j n_j; j = \overline{1, m} \quad (2.1)$$

Тогда стоимость совокупности купленных товаров (иногда называемую *бюджетом рынка*) V запишется в виде $V(\vec{n}) = \sum_k^m V_k$ (2.2).

Потребительский излишек W для набора товаров $W(\vec{n}) = U(\vec{n}) - V(\vec{n})$ (2.3) является *мерой выгоды совокупного покупателя* от приобретения данного набора товаров. Соотношение (2.3) определяет смысл процесса обмена товаров на деньги за единицу времени. За данный объем товаров совокупный покупатель выплачивает некоторую стоимость V . Она равна сумме денег, потраченных на покупку всех товаров данного набора. Взамен покупателя удовлетворяют некоторые свои потребности. *Для сопоставления полезности различных товаров вводится денежная мера, называемая ценностью товаров*.

Общепринятым считать, что совокупный покупатель стремится максимально выгодно для себя сформировать потребительскую корзину товаров. Однако, понятие «максимально выгодно» требует конкретизации.

При традиционном изложении теории спроса и потребления базовым считается *принцип оптимума покупателя* (ПрОП), смысл которого (см., напр., [12, гл.4]) очевиден: каков бы ни был бюджет данного конкурентного рынка V , затраты на покупки товаров, представленных на данном рынке, распределяются так, чтобы максимизировать ценность совершенных покупок. Например, Г. Саймон [13] считает, что «как в основе теории потребления лежит предположение, что покупатель стремится к максимизации полезности, так и в теории фирмы основополагающей является гипотеза о стремлении предпринимателя максимизировать свою прибыль».

Но реально *любой субъект экономической деятельности максимизирует не получение благ, а меру выгоды* от своих действий. Для производителя (и про-

давца), Г. Саймон прав, выгода выражается величиной прибыли (а не выручкой от реализации товара, которая имеет для него смысл *полезности* от продажи этих товаров). Заметим, что продавец отличается от производителя только природой своих издержек. Но для покупателя мерой выгоды выступает не ценность приобретенного товара, а связанный с покупкой *излишек потребителя*. Противоречия своей же, выше процитированной мысли, Г. Саймон отмечает, что «согласно большинству психологических теорий, побуждение к действию происходит из наличия *неудовлетворенных* желаний и *исчезает после их удовлетворения*» [13]. Для покупателя целью является *удовлетворение своих потребностей, минимизируя связанные с этим потери*, а вовсе не получение максимального блага (связанное с избыточными для него потерями).

Пример. Пусть есть три человека, с сопоставимыми объемами свободных финансовых средств, нуждающиеся в обновлении личного автотранспорта. И всем трем нравится марка «Форд». Но первый покупает малолитражку «Форд Эскорт», поскольку его личные потребности обусловлены только ежедневными поездками в офис фирмы, где он занимает скромную должность клерка. Второй покупает внедорожник «Форд Эксплорер», поскольку его образ жизни связан с частыми выездами на природу. Третий купил «Форд Фокус», поскольку в своей фирме он занимает должность менеджера среднего звена, и его социальный статус полностью соответствует именно такого класса автомашине.

Математически ПрОП можно представить [12, матем. прил. к гл.4] как

условный критерий вида
$$\begin{cases} U = W + \sum_n p_k n_k = \max(\vec{n}) \\ V p_k = \text{Const}, \sum_n p_k n_k = \bar{V} = \text{Const} \end{cases} \quad (2.4)$$

Реализация критерия ПрОП методом множителей Лагранжа [14], приводит к выражениям для цен вида (см., например, [12, математич. прилож. к гл.4]) $p_j = \lambda U'_j; j = \overline{1, m}; \lambda = \text{Const}$. Если сравнить это выражение с совершенно очевидным одномерным случаем, то с необходимостью следует вывод: либо всегда $\lambda = 1$, либо значение λ зависит от *числа видов конкурентных товаров, представленных на потребительском рынке* (что возможно, но маловероятно).

Кроме того, в критерии (2.4) априори считают, что $V p_k = \text{Const}$, т.е. используются *цены предложения*. Но любая *потребительская цена* (среднестатистическое отношение V_j/n_j) является *результатом неявного*

соглашения между совокупным покупателем и совокупным продавцом j -го товара. Смысл потребительской цены тождественен понятию «равновесной цены» [12]. Следовательно, реален тот спрос, который мы наблюдаем в форме потребления, что соответствует естественнонаучной традиции. Предложение мы не рассматриваем. Суть этого шага в том, что предложение³ продавца – принципиально ненаблюдаемая величина. Но уже со времен Ф. Бэкона⁴, объявившего экспериментирование основополагающим принципом познания, анализ такого рода величин считается не вполне научным занятием.

Если в теории фирмы, как верно утверждает Г. Саймон, основой служит критерий максимизации прибыли: $P = \max$, то в теории потребления его аналогом должен выступать не ПрОП, а критерий $W = \max$. Иначе говоря, покупатель стремится не к максимизации полезности приобретаемых товаров, а к разумному удовлетворению своих потребностей при условии максимизации выгоды от покупки. *Количественная мера выгоды - излишек потребителя.*

Будем исходить из постулата, согласно которому *совокупный покупатель старается максимизировать потребительский излишек* от покупки набора товаров. Этот принцип, назовем его *критерием максимизации выгоды потребителей*, используется нами как *априорное предположение для получения вида функции потребления*. В качестве условия, накладываемого на критерий оптимизации, естественно рассматривать не заданный уровень бюджета, а уровень потребления, выражающийся суммарным числом купленных товаров данного типа. Формально сказанное можно записать в виде требования:

$$\begin{cases} W(\vec{n}) = \max(\vec{n}) \\ \sum_k n_k = n = \text{Const} \end{cases} \quad (2.5)$$

³Категория предложения (*не рассматриваемая* основоположниками микроэкономики) чем-то напоминает идею эфира в классической электродинамике [11]. С его помощью стали «понятны» все известные в конце XIX в. электромагнитные эффекты. Но после опытов Майкельсона и Мэрфи, в которых эфир обнаружен не был, от него отказались. Пришло время «скорости света в пустоте» и «искривленного пространства» А. Эйнштейна.

⁴*Бэкон Фрэнсис* (1561-1626), лорд-канцлер при дворе английского короля Якова I, в философии наиболее известен как основоположник *английского материализма*. В трактате «Новый органон» Ф. Бэкон объявил *основной целью науки – увеличение власти человека над природой*. Этот постулат большинством ученых не оспаривается и поныне.

В критерии (2.5) *постоянство цен*, которые зависят от спроса и времени, не постулируется. Постоянство их значений далее рассматривается только в единицу (для относительно небольших промежутков) времени. Критерий (2.5) определяет связь между ценностью совокупности товаров и его потреблением. Используя метод множителей Лагранжа [14], из (2.5) получаем критерий максимизации вида

$$L(\vec{n}) = W(\vec{n}) + \bar{p}n - \bar{p} \sum_k^m n_k = \max(\bar{p}, \vec{n}) \quad (2.6)$$

где константа \bar{p} , имея размерность цены, одна и та же для всех товаров (не зависит от j). Откуда:

$$\forall j \in \overline{1, m}: (W'_j = \partial W(\vec{n}) / \partial n_j = \bar{p}) \wedge (W''_j \leq 0) \quad (2.7)$$

Логично считать, что критерий максимизации выгоды совокупного покупателя (2.5) в теории спроса должен рассматриваться с тем же почтением, с каким в теории фирмы рассматривается критерий максимизации прибыли. Подчеркнем, именно *прибыли, как меры выгоды производителя (продавца), а не стоимости товара, т.е. выручки от его продажи*. Легко понять, что для производителя (и продавца) *полезность товара* – это *выручка* от продажи этого товара, которая для него равна сумме выгоды (прибыли) и потерь (издержек).

Резюмируя эти рассуждения, отметим, что обсуждение правомерности ПрОП, далеко не нами и не здесь начатое, на сегодня остается «открытым». Мы далее будем исходить из критерия максимизации излишка потребителя (2.5) и его следствий (2.7). Из требований (2.7) следует линейный вид функции $W(\vec{n})$

$$W(\vec{n}) = C_j + \bar{p}(n_j - \bar{n}_j); \partial C_j / \partial n_j = 0 \neq \partial C_j / \partial n_k, k \neq j \quad (2.8)$$

Смысл параметров $\bar{n}_j (n_j \geq \bar{n}_j)$, характеризующих товары, будет разъяснен позже.

Учитывая априорную симметрию функции $W(\vec{n})$ по всем аргументами (товарам), находим: $W(\vec{n}) = \sum_j^m W_j = \bar{p}(n - \bar{n}); \bar{n} = \sum_j^m \bar{n}_j$ (2.9)

3. Вид функций, описывающих потребление и производство (торговлю)

При краткосрочном рассмотрении потребительского рынка (когда его параметры неизменны), как отмечено, например, в [15, гл.6], полные издержки S_j продавца j -го товара *всегда представимы* в виде

$$S_j = \tilde{S}_j + \bar{S}_j = \bar{s}_j n_j + \bar{S}_j, \bar{S}_j, \bar{s}_j = \text{Const}, j = \overline{1, m} \quad (3.1)$$

Смысл (3.1) заключен в том, что полные издержки S_j в единицу времени равны сумме постоянных издержек \tilde{S}_j , не зависящих от объема продаж товара, и переменных издержек \bar{S}_j , пропорциональных объему продаж. В выражении $\tilde{S}_j = \bar{s}_j n_j$ параметр \bar{s}_j (удельные переменные издержки) зависит от времени, но в любую данную единицу времени \bar{s}_j можно считать константой. Все вышесказанное (как и весь дальнейший материал этого пункта) относится не только к издержкам продавца, но и затратам производителя.

Общепринято [12], что в основе производства (торговли) лежит принцип максимизации прибыли P , которая для j -го товара имеет вид $P_j = V_j - S_j (j = \overline{1, m})$. Это позволяет записать:

$$P_j = V_j - \bar{s}_j n_j - \bar{S}_j = \max(n_j); \bar{S}_j, \bar{s}_j = \text{Const} \quad (3.2).$$

$$\text{Критерий (3.2) дает: } (\partial V_j / \partial n_j = \bar{s}_j = \tilde{S}_j / n_j) \wedge (\partial^2 V_j / \partial n_j^2 < 0); j = \overline{1, m} \quad (3.3).$$

Условие $\bar{s}, \bar{S} = \text{Const}$ имеет смысл *только для данного промежутка времени*.

$$\text{Из выражения из (3.3) следует, что } \tilde{S}_j = \tilde{S}(n_j) = n_j \partial V_j / \partial n_j; j = \overline{1, m}.$$

Будем априори считать, что состояние рынка определено величинами затрат производителей (продавцов). Но тогда *оптимальная торговля* должна в среднестатистическом смысле обеспечивать выполнение условий (3.3) в каждую единицу времени. Полагая функцию переменных издержек $\tilde{S}_j = \tilde{S}(n_j)$, с точностью до параметров, единой для всех аргументов, из (3.3) можно записать:

$$V_j = \int_0^{n_j} \tilde{S}(x) dx / x = \bar{V}_j + \int_1^{\xi_j} \tilde{S}(t) dt / t \quad (3.4)$$

$$\text{где } \bar{V}_j = \int_0^{\bar{n}_j} \tilde{S}(x) dx / x = \text{Const}, \xi_j = n_j / \bar{n}_j, n_j \geq \bar{n}_j; j = \overline{1, m};$$

а параметр \bar{n}_j является *характеристикой качества* j -го товара: $V_j(\bar{n}_j) = \bar{V}_j$. Проинтегрировав выражение (3.4) по частям, получим соотношение вида

$$V_j = \bar{V}_j + \tilde{S}(\xi_j) \ln(\xi_j) - \int_1^{\xi_j} \ln x \tilde{S}'_x(x) dx$$

Поскольку $V_j = U_j - W_j (j = \overline{1, m})$, то в качестве гипотезы примем условия вида $(U_j = \bar{V}_j + \tilde{S}(\xi_j) \ln(\xi_j)) \wedge (W_j = \int_1^{\xi_j} \ln x \tilde{S}'_x(x) dx); j = \overline{1, m}$ (3.5)

Предполагая, что функция потребительского излишка имеет аддитивный характер $(W(\vec{n}) = \sum_j^m W_j)$, критерий (2.5) можно представить как условие вида

$$L^*(\vec{\xi}) = \sum_k^m \int_1^{\xi_k} \ln x \tilde{S}'_x(x) dx + \bar{p}n - \bar{p} \sum_k^m n_k = \max(\vec{\xi}); \sum_k^m n_j = n = \text{Const} \Rightarrow \tilde{S}'(\xi_j) = \bar{n}_j \bar{p} / \ln(\xi_j) \Rightarrow \tilde{S}(\xi_j) = \bar{p} \bar{n}_j Li(\xi_j); \xi_j = n_j / \bar{n}_j; j = \overline{1, m} \quad (3.6)$$

где функция *интегрального логарифма* $Li(x)$ для действительных положительных аргументов определена в виде [16, п.VI.1.2] $Li(x) = \int_0^x dt / \ln t$.

При $x > 0$, справедливо соотношение: $Li(x) = Ei(\ln x)$, где *интегральная показательная* функция $Ei(x)$ имеет вид [16, п.VI.1.1] $Ei = \int_{-\infty}^x e^t / t dt$, а интеграл вблизи нуля понимается как его главное значение в смысле Коши. Для приложений немаловажно, что функция $Ei(x)$ представима относительно быстро сходящимся рядом вида [16, п.VI.1.1]

$$Ei(x) = E + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}$$

где $E = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right) = 0,577215665$ - константа Эйлера.

Из соотношений (3.5-6) следует, что потребительский излишек имеет вид

$$W_j = \bar{p}(n_j - \bar{n}_j); j = \overline{1, m} \Rightarrow W = \sum_j^m W_j = \bar{p}(n - \bar{n}); \bar{n} = \sum_j^m \bar{n}_j$$

Сравнив это соотношение с выражением (2.9), приходим к выводу, что принятая нами *гипотеза* (3.5) *верна*.

Используя (3.6), из (3.5) для функции ценности получаем выражение вида

$$U(\vec{n}) = \bar{V} + \bar{p} \sum_j^m \bar{n}_j \ln(\xi_j) Li(\xi_j), \bar{V} = \sum_j^m V_j \quad (3.7)$$

Совокупная стоимость товаров выразится в виде

$$V(\vec{n}) = \bar{V} + \bar{p} \sum_j^m \bar{n}_j \ln(\xi_j) Li(\xi_j) - \bar{p}(n - \bar{n}) \quad (3.8)$$

И, наконец, цена j -го товара выразится в виде

$$p = (\bar{p} / \xi_j) [1 + \ln(\xi_j) Li(\xi_j)] - \bar{p} + \bar{V}_j / n_j \quad (3.9)$$

При этом, учитывая (3.3), можно записать: $p'_n = V'_n / n - V / n^2 = -n^{-2}(V - \tilde{S}) < 0$

Следовательно, в рамках наших построений потребление товара действительно падает с ростом его цены. Что косвенно демонстрирует их правомерность. Отметим, что параметр \bar{p} инвариантен: $\bar{p} = \frac{V}{n}$

4. Ценность денег по товарам. Избыток продавца (производителя)

Прежде всего, заметим, что констатация факта купли - продажи вида «Первое лицо продало второму лицу 5 кг картошки за 200 рублей» также верно, как и заявление «Второе лицо продало первому 200 рублей за 5 кило картошки». Это следует из того, что любая покупка – это *добровольный* процесс обмена, достигаемый, как сказал один философ, «при обоюдном непротивлении сторон». Что считать товаром, а что – деньгами, вопрос договоренности.

В самом деле, картофель – это товар, который продается по цене 40 руб./ кг. Но деньги – тоже товар, который продается по цене 25 г/руб. Это цена денег по картошке. Можно рассматривать и цену r денег и по любым другим товарам. По всем товарам деньги будут обладать полезностью (благом) T , носителем блага V , стоимостью n , а их «приобретение» будет связано с «выгодой» продавца R .

Используем более общие понятия. Вместо ценности U рассмотрим «благо» A , вместо потребительского излишка W - «выгоду» B , вместо стоимости V - «потери» C , вместо количества товара n – «носитель блага» N , вместо цены p - «удельные потери» $c = C / N$. В каждом конкретном экономическом процессе благо, выгода и пр. имеют свой смысл с позиции субъекта хозяйствования.

Составим таблицу 1.

Таблица. 1

	Благо	Выгода	Потери	Носитель блага	Удельные потери
Общий взгляд	A	B	C	N	$c = C / N$
Покупатель	U	W	V	n	$p = V / n$
Производитель	V	P	S	n	$s = S / n$
Продавец	T	R	n	V	$r = n / V = 1 / p$

Таким образом, оставляя без внимания прочие функции денег, в первом приближении *правомерно считать деньги обычным товаром, обладающим*

единственным (но зато каким!) видом полезности – высочайшей ликвидностью. Исторически мировыми деньгами стало золото. Золото не подвержено коррозии и обладает высокой прочностью, его немного, но не так мало, как, скажем, платины. Все это обеспечило золоту уникальную роль мировых денег.

По аналогии с излишком потребителя, *избыток продавца* определим в виде

$$R = T - n, \quad (4.1)$$

где T – ценность денег, а n – количество приобретенного покупателями совокупного товара. Понятно, что R служит мерой выгоды совокупного продавца. Цену денег по j -му товару следует определить в виде

$$r_j = n_j / V_j = 1 / p_j \Rightarrow dr_j = -dp_j / p_j^2 \quad (4.2)$$

Ввиду смысловой симметрии, критерий максимизации выгоды совокупного продавца $R = T - n = \max$, по аналогии с условным критерием (2.5), приводит к функционалу вида

$$L^{\rightarrow}(\vec{n}) = T(n) - n + \eta V - \eta \sum_k^m V_k = \max(\eta, \vec{V}) \quad (4.3)$$

Размерность параметра η равна $[\eta] = 1 / p = 1 / \$$. Из (4.3) находим, что

$$\left(\frac{\partial T(\vec{V})}{\partial V_j} = \eta + \frac{\partial n}{\partial V_j} \right) \wedge \left(\frac{\partial^2 T(\vec{V})}{\partial V_j^2} < 0 \right), j = \overline{1, m}, \eta = \text{Const} \quad (4.4)$$

Откуда следует, что $T = \bar{C}_j + \eta V_j + n$; $\partial \bar{C}_j / \partial V_j = 0 \neq \partial \bar{C}_j / \partial V_k, k \neq j$

В силу симметрии функции $T(\vec{n})$, получаем $T = n + \eta V$ (4.5)

Для избытка продавца из (4.5) с учетом (4.1) получаем: $R(\vec{n}) = \eta V(\vec{n})$ (4.6).

Параметр η инвариантен $\eta = R / V = R_j / V_j; j = \overline{1, m}$ (4.7)

Производная от избытка продавца (производителя) по n_j имеет вид

$$\partial R(\vec{n}) / \partial n_j = R'_j = \eta V'_j = \eta \tilde{S}_j / n_j = \eta \bar{s}_j; j = \overline{1, m} \quad (4.8)$$

Следовательно, избыток продавца и ценность денег по товару монотонно возрастают по n :

$$R'_j = (\eta \bar{p} / \xi_j) Li(\xi_j) > 0, j = \overline{1, m} \quad (4.9)$$

5. Непрерывные аналоги распределений полиномиального типа

У. Джевонс считал, что *экономика - наука стохастическая* [4]: «Такие сложные законы, как законы экономики... невозможно точно определить в каждом конкретном случае. Их действие можно обнаружить только для совокупностей и методом средних». На современном языке это значит: «*Законы*

экономики носят вероятностный характер и должны изучаться статистическими методами». Для описания стохастических законов рынка нужно разобраться с видом соответствующих непрерывных распределений. В [17] получены непрерывные аналоги распределений полиномиального типа. К таким распределениям и сводятся законы теории рынка.

Непрерывный аналог r -мерного полиномиального распределения [18, п.6.4.1]

$$por(\vec{n}|n) = \Gamma(n+1) \prod_{j=1}^r n_j^{\theta_j} / \Gamma(\theta_j+1), \vec{n} \in \mathfrak{R}_r^{\oplus}$$

где θ_j – априорная вероятность j -го вида «успеха» в каждом отдельном опыте, имеет функцию плотности вероятностей (ФПВ) вида [17]

$$chr(\vec{n}|n) = \frac{\Gamma(n+r)}{n^{n+r-1}} \prod_j \frac{n_j^{\alpha_j-1}}{\Gamma(\alpha_j)} = \frac{(n - \sum_k^{r-1} n_k)^{\alpha_0-1}}{n^{\alpha_0-1}} \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_r)} \prod_j^{r-1} \frac{n_j^{\alpha_j-1}}{\Gamma(\alpha_j)} \quad (5.1)$$

где подразумевается, что

$$\alpha_j = n\theta_j + 1, j = \overline{1, r}; \sum_j n_j = n, \sum_j \theta_j = 1 \Rightarrow \alpha_0 = \sum_j \alpha_j = n+r$$

Распределение, обладающее ФПВ вида (5.1), будем для определенности называть *непрерывным полиномиальным распределением* (НПР).

Пример. На рынке представлено r видов товаров. За единицу времени продано n единиц товаров, причем по видам товаров структура совокупной покупки имеет вид n_1, \dots, n_r . Вероятность этого описывается НПР вида (5.1).

Для соответствующей функции распределения (ФР) можно записать:

$$Chr(\vec{n}|\vec{\alpha}, n) = \Gamma(\alpha_0) \int_0^{\xi_1} \frac{t_1^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} dt_1 \dots \int_0^{\xi_{r-1}} \frac{t_{r-1}^{\alpha_{r-1}-1} (1 - \sum_{k=1}^{r-1} t_k)^{\alpha_r-1}}{\Gamma(\alpha_{r-1}) \Gamma(\alpha_r)} dt_{r-1} = Dir(\vec{\xi}) \quad (5.2)$$

где вектор $\vec{\xi}$ определен в виде $\xi_j = n_j/n, j = \overline{1, r}$. В правой части выражения (5.2) стоит ФР Дирихле, а ФПВ r -мерного *распределения Дирихле* [19] имеет вид

$$dir(\vec{\xi}) = \Gamma(\alpha_0) \prod_j \xi_j^{\alpha_j-1} / \Gamma(\alpha_j); \sum_j \xi_j = 1$$

НПР и *распределение Дирихле* – аналоги бета - распределения [18, п.6.2.7].

Если в «непрерывном аналоге» серии из n «испытаний Бернулли», описываемом *непрерывными* величинами, с r исходами рассматривается распределение *абсолютного числа различных* исходов опытов, то мы имеем дело с

НПР (5.1). Если же рассматривается распределение долей различных исходов опытов, то его описывает распределение Дирихле⁵.

Пример. В данном сорте водки должно содержаться $100 \theta_1$ % воды, $100 \theta_2$ % - этилового спирта, а остальное – допустимый процент примесей. Взята проба объемом n миллилитров этой водки. НПР $ch3(\vec{n}|n)$ определяет вероятность абсолютных значений n_1, n_2 и $n_3 = n - n_1 - n_2$ фактически обнаруженных в пробе составляющих водки, а распределение $dir3(\vec{\xi})$ - вероятность обнаружения в пробе долей этих составляющих ξ_1, ξ_2 и $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$.

В частности, «непрерывное биномиальное распределение» (НБР) имеет вид

$$ch(m|\theta, n) = \frac{m^{n\theta}}{n^{n+1}} \frac{(n-m)^{n-n\theta}}{B(n\theta+1, n-n\theta+1)} \quad (5.3)$$

где бета-функция $B(\alpha, \beta)$ определена в виде [16, п. V.A.3.3]

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) / \Gamma(\alpha + \beta); \alpha, \beta > 0$$

а двумерное распределение Дирихле имеет вид

$$di(\xi|\alpha) = \xi^{\alpha-1} (1-\xi)^{\alpha_0-\alpha-1} / B(\alpha, \alpha_0-\alpha); \xi = m/n, \alpha = n\theta + 1, \alpha_0 = n + 2.$$

Моменты случайного вектора $\vec{\xi}$, подчиненного распределению Дирихле, имеют вид [19]

$$M \xi_j = \alpha_j / \alpha_0, D \xi_j = \alpha_j (\alpha_0 - \alpha_j) [(1 + \alpha_0) \alpha^2]^{-1} \\ Cov(\xi_i, \xi_j) = -\alpha_i \alpha_j [(1 + \alpha_0) \alpha^2]^{-1}; j = \overline{1, r}, i \neq j \quad (5.4)$$

Для определения наиболее вероятных значений компонентов вектора $\vec{\xi}$ распределения Дирихле запишем:

$$d[dir(\vec{\xi})] / d \xi_j = 0 \Rightarrow (\alpha_j - 1) (1 - \sum_{k=1}^{r-1} \xi_k) = \xi_j (\alpha_r - 1), j = \overline{1, r-1}.$$

В силу произвольной нумерации компонент $\vec{\xi}$, в точке глобального максимума $\vec{\xi}$ запишем:

$$\xi_j = Mo(\xi_j) = (\alpha_j - 1) / (\alpha_0 - r) \Rightarrow \xi_j = \theta_j; j = \overline{1, r} \quad (5.5)$$

Из выражений для параметров $dir(\vec{\xi})$, в силу соотношений вида $n_j = n \xi_j$, тривиально вычисляются выражения для соответствующих параметров НПР.

⁵Отметим, что в чрезвычайно популярном справочнике [18] в описание распределения Дирихле (п. 6.4.5), к сожалению, вкрались ошибки, которые полностью повторены в *Викизнание / Распределение Дирихле* (www.wikiznanie.ru).

На практике зачастую объем «непрерывной выборки» ведет себя как случайная величина. В этом случае вместо НПР нужно рассматривать распределение, которое назовем *непрерывным структурированным полиномиальным распределением* (НСПР). Его ФПВ имеет вид [17]

$$c \hbar r(n, \vec{n} \setminus n_r) = \frac{e^{-n}}{\Gamma(\alpha_r)} \left(n - \sum_k^{r-1} n_k \right)^{\alpha_r - 1} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{n_j^{\alpha_j - 1}}{\Gamma(\alpha_j)}$$

НСПР характеризует появление за единицу времени n независимых событий r типов, со структурой \vec{n} :

$$c \hbar r(n, \vec{n}) = e^{-n} \prod_{j=1}^r \frac{n_j^{n \theta_j}}{\Gamma(n \theta_j + 1)}; \sum_{j=1}^r n_j = n; \vec{n} \in \mathfrak{R}_r^{\oplus} \quad (5.6)$$

Характеристики распределения (5.6) легко вычисляются в виде:

$$\begin{aligned} \eta_j &= \alpha_j - 1; \mu_j = \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{\alpha_j} dt}{\Gamma(\alpha_j)} = \frac{\Gamma(\alpha_j + 1)}{\Gamma(\alpha_j)} = \alpha_j; \\ \sigma_j^2 &= -\alpha_j^2 + \int_0^\infty \frac{e^{-t} t^{\alpha_j + 1} dt}{\Gamma(\alpha_j)} = -\alpha_j^2 + \frac{\Gamma(\alpha_j + 2)}{\Gamma(\alpha_j)} = \alpha_j \quad (5.7) \\ \text{Cov}(n_j, n_k | n) &= \alpha_j \alpha_k \left(e^{-n} \frac{n^{\alpha_0 + 1}}{\Gamma(\alpha_0 + 2)} - 1 \right), j \neq k \end{aligned}$$

НСПР имеет ФР вида

$$C \hbar r(n, \vec{n}) = \prod_{j=1}^r \int_0^{n_j} \frac{e^{-t} t^{\alpha_j - 1} dt}{\Gamma(\alpha_j)} = \prod_{j=1}^r \frac{\gamma(\alpha_j, n_j)}{\Gamma(\alpha_j)}; \sum_{j=1}^r n_j = n$$

где $\gamma(\alpha, \beta)$ - неполная гамма-функция [16, п.V.C]:

$$\gamma(\alpha, \beta) = \int_0^\beta e^{-t} t^{\alpha - 1} dt; \alpha, \beta \in \mathfrak{R}^{\oplus} .$$

Для распределения суммы r случайных величин n_j из (5.7) находим:

$$c \hbar(n) = \underbrace{\int \dots \int}_{(r-1)} chr(n, \vec{n} \setminus n_r) dn_1 \dots dn_{r-1} = e^{-n} \int_0^n \frac{x^{\alpha_1 - 1} (n - x)^{\alpha_0 - \alpha_1 - 1} dx}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_0 - \alpha_1)} = \frac{e^{-n} n^{\alpha_0 - 1}}{\Gamma(\alpha_0)} \quad (5.8)$$

Вид выражения для ФПВ (5.8) свидетельствует о том, что $c \hbar(n)$ является стандартным гамма – распределением [18, п.6.2.6]. Его наиболее вероятное значение (мода) равна $\eta = Mo(n) = \alpha_0 - 1$, а первые моменты равны $\mu = \eta + 1 = \sigma^2$.

ФР $C \hbar(n)$ имеет вид (5.9)

Легко заметить, что, как и должно быть, $c \hbar(n, \vec{n}) = c \hbar r(\vec{n} | n) c \hbar(n); \vec{n} \in \mathfrak{R}_r^{\oplus}$.

6. Стохастические связи между производством и потреблением

Теперь возможно выразить категории потребления и производства (торговли) через распределения соответствующих вероятностей. Сделаем это на примере ценности товаров. Величины затрат (в краткосрочном смысле !)

правомерно рассматривать как параметры, определяющие характеристики потребительского рынка: $\bar{S}, \tilde{S} = Const$. Тогда из выражения (3.5) можно записать:

$$U_j = \bar{V}_j + \tilde{S}_j \ln \xi_j; \xi_j = n_j / \bar{n}_j, j = \overline{1, m} \quad (6.1)$$

Отметим, что, сопоставив (6.1) с соотношениями (3.7) и учтя выражение (3.6), мы видим, что находимся в рамках точно того же описания потребления и производства (торговли), что и в предыдущих пунктах настоящей публикации.

Совокупная ценность товаров равна

$$U = \sum_j^m U_j = \ln [e^{\bar{V}} \prod_j^m (n_j / \bar{n}_j)^{\tilde{S}_j}] \quad (6.2)$$

Это позволяет представить U в виде

$$U(\vec{n}) = \ln [\bar{C} \text{chm}(\vec{n} | \tilde{S}, n)] \quad (6.3)$$

где НПР имеет вид

$$\text{chm}(\vec{n} | \tilde{S}, n) = \frac{\Gamma(\tilde{S} + m \mathcal{S})}{n^{\tilde{S} + \mathcal{S}(m-1)}} \prod_j^m \frac{n_j^{\tilde{S}_j}}{\Gamma(\tilde{S}_j + \mathcal{S})}; \vec{n} \in \mathcal{R}_m^{\oplus} \quad (6.4)$$

а константа \bar{C} выражается в виде

$$\bar{C} = \frac{e^{\bar{V}} n^{\tilde{S} + \mathcal{S}(m-1)}}{\Gamma(\tilde{S} + m \mathcal{S})} \prod_j^m \frac{\Gamma(\tilde{S}_j + \mathcal{S})}{n_j^{\tilde{S}_j}} \quad (6.5)$$

В частности, любой конкурентный рынок правомерно рассматривать как рынок двух товаров: «нашего» и «не нашего». Объем $n - n_j$ «не нашего» товара, обладающий ценностью \hat{U}_j , был продан по цене $\hat{p}_j = (V - V_j) / (n - n_j)$

. Его ценность имеет вид

$$\hat{U}_j = U - U_j = V - V_j + (\tilde{S} - \tilde{S}_j) \ln [(n - n_j) / (\bar{n} - \bar{n}_j)], \bar{n} = \sum_j^m \bar{n}_j \quad (6.6)$$

Тогда, с учетом (6.1), стоимость товаров равна

$$U = \ln [\bar{C}_j \text{ch}(n_j | \tilde{S}_j, n)] \quad (6.7)$$

где НБР задано в виде

$$\text{ch}(n_j | \tilde{S}_j, n) = \frac{n_j^{\tilde{S}_j}}{n^{\tilde{S}_j + \mathcal{S}}} \frac{(n - n_j)^{\tilde{S} - \tilde{S}_j}}{B(\tilde{S}_j + \mathcal{S}, \tilde{S} - \tilde{S}_j + \mathcal{S})} \quad (6.8)$$

а константа \bar{C}_j имеет в виде

$$\bar{C}_j = \frac{e^{\bar{V}} n^{\tilde{S}_j + \mathcal{S}} B(\tilde{S}_j + \mathcal{S}, \tilde{S} - \tilde{S}_j + \mathcal{S})}{n_j^{\tilde{S}_j} (\bar{n} - \bar{n}_j)^{\tilde{S} - \tilde{S}_j}}; j = \overline{1, m} \quad (6.9)$$

Замечание. Материал последних двух пунктов может быть полезен при решении экономических задач на основе вероятностных методов теории игр [20].

В работе предложен нетрадиционный подход, позволяющий количественно рассмотреть процессы потребления и производства (торговли) с единых позиций. В основу, вместо традиционного принципа оптимума потребителя, был положен критерий максимизации совокупного потребительского излишка. Это позволило получить функциональные связи между потреблением (понимаемым как реализованный спрос) и основными категориями производства (торговли). Введено понятие ценности (полезности) денег по товарам рынка. В основу анализа положен анализ обмена денег на товар. Приведена связь описанного детерминированного подхода с изложением этого материала в стохастических терминах, используя непрерывные аналоги полиномиального распределения. Указан вид распределений, даны выражения для их моментов и значений мод.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Е.В.* Стохастические методы анализа данных выборочных маркетинговых и социальных обследований. // Прикладная эконометрика. М., 2011.
2. *Черепанов Е.В.* К вопросу формализации базовых понятий теории потребительского спроса. // Математические методы и компьютерные технологии в маркетинговых и социальных исследованиях. Сборник научн. трудов. М, 2004.
3. *Jevons W.S.* Notice of a general mathematical theory of political economy. British Assoc. For the Advancement of Science // Report of the 32 Meeting Transaction of the Sections. L.J. Murray. 1862.
4. *Jevons W.S.* Brief of a general mathematical theory of political economy // Journal of the Statistical Society of London. 1866. XXIX. № 2.

5. *Duport J.* De la mesure de l'utilite des travaux publics // Annales des ponts et chaussees. 1844, VIII, ser. 2.
6. *Аристотель.* Никомахова этика // Философы Греции. Серия Антология мысли. М., 1999.
7. *Viner J.* Cost curves and supply curves // Readings in Price Theory. Homewood, 1952.
8. *Пашин Ю.А.* Маркетинговые исследования как основа рекламной деятельности при продвижении товаров на рынках // Анализ социально-экономических и политических процессов и систем. Сборник научных работ. Вып. 1. М., 2005.
9. *Viner J.* The utility concept in value theory and its critics // Journal of Political Economy. 1925. v. XXXIII. № 4.
10. *Толстова Ю.Н.* Корректность функции расстояния относительно типа используемых шкал в социально - экономических исследованиях // Экономика и математические методы, 1978.
11. *Черепанов Е.В.* Эволюция физической картины мира. М., 2009.
12. *Пиндайк Р.С., Рубинфельд Д.Л.* Микроэкономика. М., 2000.
13. *Simon H.* Theories of decision-making in economics and behavioral science // Microeconomics: Selected Reading. Ed. by E. Mansfield. N.Y., 1971.
14. *Уайльд Д.* Методы поиска экстремума. М., 1967.
15. *Ковалев С.В.* Экономическая математика. М., 2010.
16. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., 1977.
17. *Черепанов Е.В.* Непрерывные аналоги распределений полиномиального типа для выборочных социально-экономических обследований // Материалы V Всероссийской конференции «Социологические методы в современной исследовательской практике». Москва, 22 февраля 2011 г. М., 2011.
18. *Королюк В.С.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев, 1978.
19. *Dirichlet distribution* (http://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_distribution).
20. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. М., 1998.

LITERATURE

1. *Cherepanov E.V.* Stohasticheskie metody analiza dannyh vyborochnykh marketingovykh i social'nykh obsledovaniy. // Prikladnaya ekonometrika. M., 2011.
2. *Cherepanov E.V.* K voprosu formalizatsii bazovykh ponyatii teorii potrebitel'skogo sprosa. // Matematicheskie metody i komp'yuternye tehnologii v marketingovykh i social'nykh issledovaniyakh. Sbornik nauchn. trudov. M, 2004.
3. *Jevons W.S.* Notice of a general mathematical theory of political economy. British Assoc. For the Advancement of Science // Report of the 32 Meeting Transaction of the Sections. L.J. Murray. 1862.
4. *Jevons W.S.* Brief of a general mathematical theory of political economy // Journal of the Statistical Society of London. 1866. XXIX.
5. *Dupuit J.* De la mesure de l'utilite des travaux publics // Annales des ponts et chaussees. 1844, VIII, ser. 2.
6. *Aristotel'.* Nikomahova etika // Filosofiy Grezii. Seriya Antologiya mysli. M., 1999.
7. *Viner J.* Cost curves and supply curves // Readings in Price Theory. Homewood, 1952.
8. *Pashin Yu.A.* Marketingovye issledovaniya kak osnova reklamnoi deyatel'nosti pri prodvizhenii tovarov na rynkakh // Analiz social'no-ekonomicheskikh i politicheskikh processov i sistem. Sbornik nauchnykh rabot. Vyp. 1. M., 2005.
9. *Viner J.* The utility concept in value theory and its critics // Journal of Political Economy. 1925. v. XXXIII.
10. *Tolstova Yu.N.* Korrektnost' funktsii rasstoyaniya otnositel'no tipa ispol'zuemykh shkal v social'no - ekonomicheskikh issledovaniyakh // Ekonomika i matematicheskie metody, 1978.
11. *Cherepanov E.V.* Evolyuciya fizicheskoi kartiny mira. M., 2009.
12. *Pindaik R.S., Rubinfel'd D.L.* Mikroekonomika. M., 2000.

13. *Simon H.* Theories of decision-making in economics and behavioral science // *Microeconomics: Selected Reading*. Ed. by E. Mansfield. N.Y., 1971.
14. *Uail'd D.* Metody poiska ekstremuma. M., 1967.
15. *Kovalev S.V.* Ekonomicheskaya matematika. M., 2010.
16. *Yanke E., Emde F., Lesh F.* Special'nye funktsii. M., 1977.
17. *Cherepanov E.V.* Nepreryvnye analogi raspredelenii polinomial'nogo tipa dlya vyborochnykh social'no-ekonomicheskikh obsledovaniy // *Materialy V Vserossiiskoi konferentsii «Sociologicheskie metody v sovremennoi issledovatel'skoi praktike»*. Moskva, 22 fevralya 2011 g. M., 2011.
18. *Korolyuk V.S.* Spravochnik po teorii veroyatnostei i matematicheskoi statistike. Kiev, 1978.
19. *Dirichlet distribution* (http://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_distribution).
20. *Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Semina E.A.* Teoriya igr. M., 1998.

Институт экономики

и комплексных проблем связи, г. Москва

17 марта 2012 г.
