

© 2013 г. Е.В. Черепанов

УДК 330

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТОВЫХ И РОЗНИЧНЫХ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ РЫНКОВ

Введение

Базовые категории современной экономики были заложены в середине XIX в. Но до сегодняшнего дня в основном эти категории известны в описательном виде («кривая ценности возрастает с ростом спроса на товар и выпукла вверх», «спрос падает с ростом цены» и т.п.) Целью данной работы является определение вида фундаментальных взаимосвязей между основными характеристиками базовых категорий производства, потребления и торговли.

Основой наших рассуждений служит мысль У.С. Джевонса [1, р. 282-287] о том, что «законы экономики носят настолько сложный характер, что проявляются только для совокупностей и должны изучаться методом средних». На «современный язык» это может быть «переведено» так: «Экономические законы носят стохастический характер и *должны изучаться статистическими методами*». Следовательно, необходим эконометрический подход к решению проблемы.

Под «эконометрией» понимается научное направление, изучающее «количественные закономерности и взаимосвязи экономических объектов и процессов с помощью математических и статистических методов и моделей. Модели, используемые в эконометрии, обеспечивают получение численных результатов на базе статистической, прогнозной и плановой информации. Иногда эконометрию расширительно трактуют как моделирование экономических процессов вообще, включая и абстрактные теоретические модели» [2, с. 600]. По-видимому, наиболее полно особенности эконометрии изложены в фундаментальном труде С.А. Айвазяна и В.С. Мхитаряна [3]. Стоит отметить, что базовая суть эконометрии (или эконометрики) этими авторами понимается несколько иначе, чем было указано непосредственно выше.

У.С. Джевонс [4, р. 158-159] ввел понятия *полезности* товара и его *ценности*, чем, по существу, заложил основу «теории обмена, которая является следствием теории полезности» [1]. В современном понимании *полезность товара* – это его способность удовлетворять потребности покупателей. А *потребности* – это необходимость или желание покупателя получить некоторые *блага*, связанные со свойствами приобретаемого товара, т.е. нечто, что он связывает с *удовлетворением*, исходя из социальных представлений, своего личного образа жизни или нужды. В таком же смысле высказался Дж. Винер: «Благосостояние есть поток полезности, а полезность означает удовлетворение... Какова бы ни была сущность благосостояния, все согласны с тем, что для человека она скорее субъективная и внутренняя, чем объективная и внешняя» [5].

Индивидуальный спрос (на данный товар) отдельно взятого покупателя – это количество товара, которое этот покупатель готов приобрести в данных условиях потребительского рынка. Суперпозиция индивидуальных спросов покупателей изучаемого потребительского рынка образует *совокупный спрос* на данный товар n , который можно рассматривать как функцию его цены p : $n = n(p)$. Законы потребления, по существу, определяются законами социальной психологии. Но их изучение с экономических позиций оправдано лишь в тех случаях, когда это делается в целях разработки эффективных стратегий продвижения товаров на новые потребительские рынки [6]. Вопросы *количественного* выявления ожиданий и предпочтений покупателей и их социальных категорий автор рассматривал в работах [7, с. 167-188; 8, с. 48-61; 9; 10].

Совокупный спрос определяет количество данного товара на данном рынке, которое *совокупный* покупатель хочет и может приобрести в предлагаемых ему условиях. *Потребление* – это количество *реально* купленного (за *единицу времени*) товара (в зависимости от его цены и цен товаров-конкурентов). Под «*единицей времени*» понимается *период, за который фиксируется состояние рынка*. Таким образом, *потребление – это реализованный (за единицу времени) спрос*. Совокупный спрос *измерим*, поскольку он *объективно* проявляется в форме *потребления* товара за единицу времени.

Перед ознакомлением с ниже изложенным материалом, читателю было бы полезно просмотреть работы [11, с. 313-333; 12, с. 107-117; 13, с. 154-166], поскольку предлагаемая статья является прямым развитием материала, изложенного в указанных публикациях.

1. Категории потребительского многотоварного конкурентного рынка

Рассмотрим рынок из m видов конкурентных товаров. Пусть j -й товар за единицу времени куплен в объеме n_j . Под функцией ценности набора из m конкурентных товаров понимается функция $U(n_1, \dots, n_m)$, которая по каждому аргументу монотонно возрастает и выпуклая вверх. Последнее утверждение отражает закон убывающей ценности: покупка $(k+1)$ -й единицы товара для потребителя всегда менее ценна, чем покупка k -й единицы этого товара.

Экономический смысл ценности товаров заключается в том, что каждый набор товаров приносит определенную «пользу», некое «благо» совокупному покупателю, и, следовательно, обладает определенной полезностью. А ценность $U(\vec{n})$ – это выражение полезности данного набора товаров \vec{n} в деньгах. Деньги являются единой шкалой измерения полезности, позволяющей сравнивать ценность товаров различной природы и качества.

Потребительская цена p_j j -го товара – это среднестатистическое отношение суммарного количества отданных (в единицу времени) покупателями за него денег V_j к количеству приобретенного товара n_j . Спрос – это векторная функция $\vec{n}(\vec{p})$ от вектора цен \vec{p} . Спрос определяет количество товаров разного вида, представленных на рынке, которое совокупный покупатель хочет и может приобрести в заданных условиях. Функция потребления задает векторную величину количества фактически купленных (за единицу времени) товаров (в зависимости от заданного вектора цен). Совокупный спрос, проявляясь в форме потребления товаров, измерим.

Стоимость n_j единиц j -го товара имеет вид

$$V_j = p_j n_j; j = \overline{1, m}. \quad (1.1)$$

Суммарная стоимость купленных на розничном рынке (за единицу времени) товаров V имеет вид

$$V(\vec{n}) = \sum_k^m V_k. \quad (1.2)$$

Потребительский излишек (или излишек потребителя) W , введенный в экономическую науку Ж. Дюпюи [14, р. 332-375], является мерой выгоды совокупного покупателя от приобретения товаров в заданных объемах n_1, n_2, \dots, n_m :

$$W(\vec{n}) = U(\vec{n}) - V(\vec{n}). \quad (1.3)$$

Общепринято считать, что совокупный покупатель стремится «максимально выгодно» для себя (в среднестатистическом смысле) сформировать потребительскую корзину приобретенных товаров. Но, понятие «максимально выгодно» требует уточнения [15, с. 117-122]. Наиболее часто используют *принцип оптимума потребителя* (ПрОП), который [16, гл. 4] представим в виде

$$\begin{cases} U(\vec{n}) = W(\vec{n}) + \sum_k^m p_k n_k = \max(\vec{n}); \\ \forall p_k = \text{const}; \sum_k^m p_k n_k = V_0 = \text{const}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Из критерия (1.4) методом множителей Лагранжа [17] получаем:

$$L(\vec{n}) = U(\vec{n}) + \lambda V_0 - \lambda \sum_j^m p_j n_j = \max(\vec{n}); \lambda, p_j = \text{const}, j = \overline{1, m}. \quad (1.5)$$

Постоянство цен везде далее понимается только для небольших промежутков («единиц») времени. Такой подход правомерен и часто применяем¹.

Отсюда

$$\left(\forall j: \frac{\partial U}{\partial n_j} = \lambda p_j \right) \wedge \left(\forall j: \frac{\partial^2 U}{\partial n_j^2} < 0 \right). \quad (1.6)$$

Отметим, что соотношения (1.6) справедливы и для монопольного рынка (при $m = 1$ и $\lambda = 1$). Разумеется, об использовании ПрОП на монопольном рынке говорить не приходится. Но оказывается, что из простых соображений можно доказать, что *на монопольном рынке предельная ценность товара равна его цене*. Используя это обстоятельство [12], совместно с условием максимизации прибыли монополиста, удастся математически описать количественные взаимосвязи характеристик монопольного рынка.

Смысл ПрОП очевиден: при любом бюджете потребительского рынка V_0 , затраты на покупки товаров распределяются так, чтобы максимизировать ценность совершенных покупок. Например, Г. Саймон [18] считает, что «в основе теории потребления лежит предположение о том, что совокупный покупатель стремится к максимизации полезности купленных товаров».

Но эта точка зрения не бесспорна [15]. Можно полагать, что в реальности *любой субъект экономической деятельности максимизирует совсем не получение благ от покупки, а меру выгоды от своих действий*.

Для производителя выгода выражается величиной прибыли (а не выручкой от реализации товара, которая имеет для него смысл *полезности* от продажи этих товаров). Как и для продавца, который отличается от произ-

¹ Например, в классической механике при изучении непрерывного сложного движения рассматривается *мгновенная скорость*, которая, по существу, представляет собой среднюю скорость в данную (очень малую) единицу времени.

водителя только природой своих издержек. Для покупателя же мерой выгоды выступает не ценность купленного товара, а связанный с покупкой *излишек потребителя*.

Противореча своей выше процитированной мысли, Г. Саймон отмечает, что «согласно большинству психологических теорий, побуждение к действию происходит из наличия *неудовлетворенных желаний* и *исчезает после их удовлетворения*» [18]. Если в теории производства, как верно считает Г. Саймон, основой служит критерий максимизации прибыли: $P = \max$, то в теории потребления его аналогом может выступать не ПрОП, а критерий $W = \max$, который можно назвать «критерием максимума выгоды (КМВ)».

Это значит, что *совокупный покупатель стремится не к максимизации полезности приобретенных товаров, а к удовлетворению своих реальных потребностей при условии максимизации выгоды от их покупки*. Количественной мерой его выгоды выступает излишек совокупного потребителя. Этот взгляд на оптимизацию структуры совокупной покупки автором был исследован в работах [11; 9, гл. 6]. В работе [13] автором было рассмотрено выявление функциональных связей между характеристиками потребления и производства с использованием ПрОП. Отметим, что математически результаты решения указанной проблемы с использованием критерия $W = \max$ разительно отличаются от аналогичных результатов, полученных на основе использования ПрОП, что *вполне естественно*.

В итоге размышлений на эту тему, автор пришел к выводу о том, что *формирование структуры совокупной покупки на розничном и оптовом потребительских рынках принципиально отличаются*, что обусловлено относительным характером категорий полезности, издержек и выгоды. И для корректного рассмотрения процесса «производство-потребление» необходимо, кроме производителей товаров и совокупного покупателя на розничном рынке, введение еще одного экономического субъекта – совокупного посредника.

Цели производителей, посредника и совокупного покупателя кардинально различны. На розничном рынке для *покупателя целью является удовлетворение своих насущных потребностей, минимизируя связанные с этим собственные потери*, а не получение максимума ценности купленных товаров (связанное с избыточными для него затратами). Вывод: *структура совокупной покупки на потребительском рынке формируется по критерию $W = \max$* .

Пример. Есть три человека, с сопоставимыми объемами свободных финансовых средств, нуждающиеся в обновлении личного автотранспорта. И всем нравится марка «Форд». Но первый покупает малолитражку «Форд Эскорт», поскольку его личные потребности обусловлены только ежедневными поездками в офис фирмы, где он занимает скромную должность клерка. Второй покупает внедорожник «Форд Эксплорер», поскольку его образ жизни связан с частыми выездами на природу. Третий купил «Форд Мондео», поскольку в своей корпорации он служит менеджером среднего звена, и его социальный статус полностью соответствует именно такого класса автомашине.

На *оптовом рынке* совокупный посредник (целью которого является перепродажа купленных товаров, а не их использование по назначению) стремится максимизировать совокупную ценность приобретённых товаров. Следовательно, *он должен руководствоваться критерием* $U = \max$, т.е. ПрОП, который точнее было бы назвать «принципом оптимума оптового покупателя».

Далее мы рассмотрим использование критериев $P = \max$ (для производителей товаров и продавцов на розничном рынке), $U = \max$ (для покупателей-оптовиков) и $W = \max$ (для покупателей на розничном рынке).

Критерий максимума выгоды (КМВ) для покупателей розничного рынка следует записать в виде

$$\begin{cases} W(\vec{n}) = \max(\vec{n}); \\ \sum_k^m n_k = n = \text{const}; \end{cases} \quad (1.7)$$

где W – потребительский излишек для совокупного покупателя розничного потребительского рынка. В качестве условия, накладываемого на критерий оптимизации, естественно рассматривать не заданный уровень совокупной стоимости товаров $\sum_k^m p_k n_k = \text{const}$, а уровень потребления $n = \text{const}$, выражающийся суммарным количеством купленных (однотипных) товаров. Смысл КМВ состоит в том, что каким бы ни был суммарный уровень потребления n , структура совокупной покупки будет такова, чтобы обеспечить максимум выгоды (потребительского излишка) совокупному покупателю. Этот принцип будет использован нами как *априорное предположение для получения вида функций, описывающих структуру покупок совокупным покупателем на многотоварном конкурентном розничном потребительском рынке.*

Используя метод множителей Лагранжа [17], из (1.7) получаем:

$$L^*(\vec{n}) = W(\vec{n}) + \bar{p}n - \bar{p}\sum_j^m n_j = \max(\vec{n}); \bar{p} = \text{const}, \vec{n} \in \mathfrak{R}^{\oplus}. \quad (1.8)$$

Из критерия (1.8) следуют следующие условия:

$$\left(\forall j: \frac{\partial w}{\partial n_j} = \bar{p} \right) \wedge \left(\forall j: \frac{\partial^2 w}{\partial n_j^2} < 0 \right). \quad (1.9)$$

Логично считать, что КМВ (1.7) в теории розничного потребления должен рассматриваться с тем же почтением, с каким в теории фирмы рассматривается критерий максимизации прибыли.

2. Критерий максимизация прибыли производителя

Рассмотрим оптовый потребительский рынок, на котором представлено m видов конкурентных товаров. На этом рынке производители выступают в роли продавцов, а оптовики – в роли покупателей.

Для упрощения изложения, что не снижает его общности, будем считать, что каждый j -й товар в объеме n_j произведен одним производителем.

При краткосрочном рассмотрении оптового рынка (когда его параметры неизменны) затраты S_j производителя j -го товара можно представить в виде

$$S_j = \bar{S}_j + \tilde{S}_j(n_j) = \bar{S}_j + \tilde{s}_j n_j; \bar{S}_j = const, j = \overline{1, m}. \quad (2.1)$$

где \bar{S}_j и \tilde{S}_j – соответственно постоянные и переменные затраты (в единицу времени!) производителя j -го товара. В выражении (2.1) удельные переменные затраты $\tilde{s}_j = \tilde{S}_j/n_j$ зависят от объема продаж и, следовательно, от времени, но в любую данную единицу времени \tilde{s}_j можно считать константой. Общепринято считать [16; 18], что в основе теории производства лежит принцип максимизации прибыли P . Исключение составляют некоторые частные задачи: захвата нового сегмента рынка, вытеснения с рынка данного конкурента и т.п.

Прибыль производителя \tilde{P}_j от продажи j -го товара определена в виде

$$\tilde{P}_j(n_j) = \tilde{V}_j(n_j) - S_j(n_j); j = \overline{1, m}, \quad (2.2)$$

где \tilde{V}_j – стоимость j -го товара:

$$\tilde{V}_j = \tilde{p}_j n_j, j = \overline{1, m}, \quad (2.3)$$

а \tilde{p}_j – оптовая цена j -го товара. Это позволяет записать критерий максимизации прибыли в виде

$$\tilde{P}_j = \tilde{V}_j - S_j - \tilde{s}_j n_j = \max(n_j); \tilde{s}_j = \tilde{S}_j/n_j = const, j = \overline{1, m}, \quad (2.4)$$

где переменные удельные затраты $\tilde{s}_j = \tilde{S}_j/n_j$ мы считаем постоянной величиной только для данной (малой) единицы времени.

Критерий (2.4) дает:

$$\left(\forall j: \frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial n_j} = \tilde{s}_j \right) \wedge \left(\frac{\partial^2 \tilde{V}_j}{\partial n_j^2} < 0 \right). \quad (2.5)$$

Из выражения из (2.5) следует:

$$\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial n_j} = \tilde{S}_j/n_j \Rightarrow \tilde{V}_j = \bar{S}_j + \int_{\bar{n}_j}^{n_j} \tilde{S}_j \frac{dx}{x}, \quad \bar{S}_j = const; \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.6)$$

где $n_j \geq \bar{n}_j$, а параметр \bar{n}_j характеризует *качество* j -го товара и равно минимальному его количеству, производство которого еще приносит прибыль.

Из выражения из (2.5) следует, что

$$\frac{\partial \tilde{V}_j}{\partial n_j} = \tilde{S}_j/n_j \Rightarrow \tilde{V}_j = \bar{S}_j + \int_{\bar{n}_j}^{n_j} \tilde{S}_j \frac{dx}{x}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.6)$$

где $n_j \geq \bar{n}_j$, а параметр \bar{n}_j характеризует *качество* j -го товара. Численно \bar{n}_j равно минимальному количеству j -го товара, производство которого имеет торговый смысл (приносит прибыль).

Введем новые переменные:

$$\forall j: \zeta_j = \ln(n_j/\bar{n}_j) \Leftrightarrow n_j = \bar{n}_j e^{\zeta_j}, \quad (2.7)$$

причем операторы дифференцирования по переменным «дзета» имеют вид

$$\left(\forall j: \frac{\partial}{\partial \zeta_j} = n_j \frac{\partial}{\partial n_j} \right) \wedge \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta_j^2} = n_j \frac{\partial}{\partial n_j} + n_j^2 \frac{\partial^2}{\partial n_j^2} \right) \quad (2.8)$$

Перейдя к переменным $\vec{\zeta}$, из (2.6) получаем выражение вида

$$\tilde{V}_j = \bar{S}_j + \int_0^{\zeta_j} \tilde{S}_j dx = \bar{S}_j + \zeta_j \bar{S}_j - \int_0^{\zeta_j} x d\tilde{S}(x); \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.9)$$

3. Производственная функция (издержки производителей)

Будем исходить из того, что *оптовый* рынок определен качеством представленных на нем товаров, совокупным спросом торговцев и затратами производителей. *Оптимальная торговля в среднестатистическом смысле должна обеспечивать выполнение условий (2.5) в каждую единицу времени.*

Будем полагать функцию затрат $S_j = S(n_j)$, с точностью до параметров, единой для всех аргументов. Структура совокупной покупки покупателей на оптовом рынке подчинена ПрОП, т.е. критерию условной максимизации суммарной ценности купленных товаров, поскольку целью торговцев является перепродажа товара, а не его использование по прямому назначению.

Пусть для *совокупного посредника*, который здесь выступает как покупатель, \tilde{U}_j и \tilde{W}_j – ценность купленного количества n_j j -го товара и излишек потребителя при этой покупке, соответственно. Используя выражение (1.5), в этом случае (с учетом того, что $\partial n_j / \partial \zeta_j = n_j$) правомерно записать:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\vec{\zeta}) &= \tilde{U}(\vec{\zeta}) + \lambda \tilde{V}_0 - \lambda \sum_j^m \tilde{p}_j n_j = \max(\vec{\zeta}); \quad \lambda, \tilde{p}_j = const \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\forall j: \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \zeta_j} &= \lambda \tilde{p}_j n_j = \lambda \tilde{V}_j \right) \wedge \left(\forall j: \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \zeta_j^2} < \lambda \tilde{V}_j \right), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используя соотношение $\tilde{V}_j = \tilde{U}_j - \tilde{W}_j$ и учитывая выражение (2.9), в качестве гипотезы, которую нам предстоит обосновать, примем условия вида

$$\tilde{U}_j = \bar{S}_j + \zeta_j \tilde{S}_j; j = \overline{1, m}; \quad (3.2)$$

$$\tilde{W}_j = \int_0^{\zeta_j} x d\tilde{S}(x); j = \overline{1, m}. \quad (3.3)$$

В силу (3.1) и (3.2) запишем выражение вида

$$\tilde{V}_j = \lambda^{-1} d\tilde{U}/d\zeta_j = \lambda^{-1} [\zeta_j d\tilde{S}_j/d\zeta_j + \tilde{S}(\zeta_j)]. \quad (3.4)$$

Сравнив выражения (3.4) и (2.9), получаем, опуская для краткости индексы, уравнение вида

$$\zeta d\tilde{S}/d\zeta + \tilde{S}(\zeta) = \tilde{V}(\zeta) = \lambda\bar{S} + \lambda \int_0^{\zeta} \tilde{S}(x) dx. \quad (3.5)$$

Продифференцировав выражение (3.5), получаем уравнение вида

$$\zeta d^2\tilde{S}/d\zeta^2 + 2 d\tilde{S}/d\zeta = \lambda \tilde{S}(\zeta). \quad (3.6)$$

Используя результат [19, п.2.2.103], общее решение уравнения (3.6) определяется с помощью цилиндрической функции $Z_\nu(z)$ минус первого порядка [20, п. XII.A] $\tilde{S}(\zeta) = \zeta^{-\frac{1}{2}} Z_{-1}(2i\sqrt{\lambda\zeta})$, которая, в свою очередь, выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ и Неймана $Y_\nu(z)$ [15, п. XII.A] в виде

$$Z_1(z) = -[\bar{C}J_1(z) + \tilde{C}Y_1(z)], \text{ где } \bar{C}, \tilde{C} \in \mathbb{C}.$$

где z – комплексная переменная, а $\bar{C}, \tilde{C} \in \mathbb{C}$ – комплексные константы.

Избыточно общее выражение для переменных затрат производителя j -го товара запишем в виде

$$\tilde{S}(\zeta_j) = -\zeta_j^{-\frac{1}{2}} [\bar{C}J_1(2i\sqrt{\lambda\zeta_j}) + \tilde{C}Y_1(2i\sqrt{\lambda\zeta_j})]. \quad (3.7)$$

Ясно, что определение функции затрат над полем комплексных чисел *не имеет реального экономического смысла*, в связи с чем нам предстоит привести это выражение к некоторой функции, области определения и прибытия которой являются полем действительных неотрицательных чисел.

Функция Неймана $Y_1(z)$ [20, п. XIII.A.2] *всегда* определяет комплексное число *с ненулевой мнимой частью*. Следовательно, в выражении для $\tilde{S}(\zeta_j)$ нам необходимо принять $\tilde{C} = 0$. Используя представление функции Бесселя $J_\nu(2i\sqrt{\lambda\zeta})$ в виде ряда [20, п. XIII.A.2]

$$J_\nu(z) = \sum_0^\infty [(-1)^k (z/2)^{2k+\nu} / [k! \Gamma(k+\nu+1)]],$$

получаем выражение:

$$J_1(2i\sqrt{\lambda\zeta}) = i\sqrt{\lambda\zeta} \sum_0^\infty (\lambda\zeta)^k / [k! (k+1)!].$$

Приняв $\bar{C} = i\bar{S}\sqrt{\lambda}$ ($i^2 = -1, \bar{S}, \lambda \in \mathfrak{R}^\oplus$), получаем *вид функции переменных затрат производителя j -го товара, которую называют производственной функцией*:

$$\tilde{s}_j = \tilde{s}(\zeta_j) = \lambda \bar{s}_j \sum_0^\infty (\lambda \zeta_j)^k / [k! (k+1)!]. \quad (3.8)$$

Используя определение модифицированной функции Бесселя $I_\nu(z)$ [15, XIII.B) в виде $I_\nu(z) = \sum_0^\infty (z/2)^{2k+\nu} / [k! \Gamma(k+\nu+1)]$, можно записать: $I_0(2\sqrt{\lambda\zeta}) = \sum_0^\infty (\lambda\zeta)^k / (k!)^2$ и $I_1(2\sqrt{\lambda\zeta}) = \sqrt{\lambda\zeta} \sum_0^\infty (\lambda\zeta)^k / [k! (k+1)!]$.

Учитывая (3.8), функцию переменных издержек производителя j -го товара можно представить в виде $\tilde{s}_j = \bar{s}_j \sqrt{\lambda/\zeta_j} I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j})$; $\bar{s}_j \in \mathfrak{R}^\oplus$. (3.9)

Для производных переменных издержек справедливы соотношения вида

$$d\tilde{s}_j/d\zeta_j = \lambda^2 \bar{s}_j \sum_0^\infty (\lambda\zeta_j)^k / [k! (k+2)!],$$

$$d^2\tilde{s}_j/d\zeta_j^2 = \lambda^3 \bar{s}_j \sum_0^\infty (\lambda\zeta_j)^k / [k! (k+3)!].$$

4. Зависимости между характеристиками оптового рынка

Для «оптовой ценности» j -го товара (3.2), справедливо выражение вида

$$\tilde{U}_j = \bar{s}_j [1 + \sqrt{\lambda\zeta_j} I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j})] = \bar{s}_j \left[1 + \sum_0^\infty (\lambda\zeta_j)^{k+1} / [k! (k+1)!] \right]. \quad (4.1)$$

Оптовая стоимость j -го товара, учитывая выражения (3.4) и (4.1), имеет вид

$$\tilde{V}_j = \tilde{v}(\zeta_j) = \lambda^{-1} (d\tilde{U}_j/d\zeta_j) = \bar{s}_j \sum_0^\infty [(\lambda\zeta_j)^k / (k!)^2] = \bar{s}_j I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j}). \quad (4.2)$$

Используя выражении (2.9) и (3.8), можно записать:

$$\tilde{V}_j = \bar{s}_j + \int_0^{\zeta_j} \tilde{s}(x) dx = \bar{s}_j \sum_0^\infty [(\lambda\zeta_j)^k / (k!)^2] = \bar{s}_j I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j}). \quad (4.3)$$

Но отсюда непосредственно видно, что соотношения (4.2) и (4.3) эквивалентны. Это доказывает, что сделанная нами гипотеза (3.2-3) верна. Из двух разных (и невзаимосвязанных!) предпосылок (ПрОП и критерия максимума прибыли) получены одинаковые выражение для величины стоимости $\tilde{V}(\zeta_j)$.

Учитывая, что $d\zeta_j/dn_j = 1/n_j$, отметим, что, как это и должно выполняться из условий (2.5): $d\tilde{V}_j/dn_j = (\lambda \bar{s}_j/n_j) \sum_0^\infty (\lambda\zeta_j)^k / [k! (k+1)!] = \tilde{s}_j/n_j = \tilde{s}(n_j)$.

Оптовая цена товара, с учетом (4.2), выражается в виде

$$\tilde{p}_j = \tilde{V}_j/n_j = (\bar{s}_j/\bar{n}_j) e^{-\zeta_j} \sum_0^\infty (\lambda\zeta_j)^k / (k!)^2 = (\bar{s}_j/n_j) I_0(2\sqrt{\lambda\zeta_j}). \quad (4.4)$$

Причем $d\tilde{p}_j/dn_j = [(d\tilde{V}_j/d\zeta_j) - \tilde{V}_j]/n_j^2 = -[\tilde{V}_j - \bar{s}_j]/n_j^2 = -[\tilde{p}_j + \bar{s}_j]/n_j^2 < 0$.

Полная ценность совокупного купленного на оптовом рынке товара равна

$$\tilde{U}(\vec{\zeta}) = \sum_{j=0}^m \tilde{U}(n_j) = \bar{s} + \sum_0^m \bar{s}_j [\sqrt{\lambda\zeta_j} I_1(2\sqrt{\lambda\zeta_j})], \quad (4.5)$$

где $\bar{s} = \sum_{j=0}^m \bar{s}_j$. Производная полной ценности по ζ_j равна

$$d\tilde{U}/d\zeta_j = \lambda \bar{s}_j \sum_0^\infty (\lambda\zeta_j)^k / (k!)^2 = \lambda \tilde{V}(n_j).$$

Вторая производная от оптовой ценности совокупного товара по ζ_j равна

$$d^2\tilde{U}/d\zeta_j^2 = \lambda^2 \bar{s}_j \sum_{j=0}^\infty (\lambda\zeta_j)^k / [k! (k+1)!] = \lambda \tilde{s}(n_j) \Rightarrow d\tilde{V}_j/d\zeta_j = \tilde{s}_j. \quad (4.6)$$

Прибыль производителя от продажи j -го товара имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j &= \tilde{V}_j - S_j = \bar{S}_j \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k - \lambda + 1) (\lambda \zeta_j)^k \right] / [k! (k + 1)!] - \lambda \right\} = \\ &= \bar{S}_j [I_0(2\sqrt{\lambda \zeta_j}) - \sqrt{\lambda / \zeta_j} I_1(2\sqrt{\lambda \zeta_j}) - 1]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Величина потребительского излишка оптовиков от покупки j -го товара имеет вид

$$\tilde{W}_j = \tilde{U}_j - \tilde{V}_j = \bar{S}_j [\sqrt{\lambda \zeta_j} I_1(2\sqrt{\lambda \zeta_j}) - I_0(2\sqrt{\lambda \zeta_j}) + 1]. \quad (4.8)$$

С другой стороны, учитывая выражение (2.9), правомерно записать:

$$\tilde{W}_j = \int_0^{\zeta_j} x d\tilde{S}(x) = \bar{S}_j \sum_{k=1}^{\infty} [k (\lambda \zeta_j)^{k+1}] / [(k + 1)!]^2. \quad (4.9)$$

Не составляет труда показать, что выражения (4.8) и (4.9) эквивалентны. Этот факт также подтверждает справедливость сделанной нами гипотезы (3.2-3).

Производная от излишка покупателей-оптовиков j -го товара имеет вид

$$d\tilde{W}_j / dn_j = (\lambda \bar{S}_j / n_j) \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda \zeta_j)^k / [(k - 1)! (k + 1)!] > 0.$$

Следовательно, потребительский излишек с ростом потребления возрастает.

5. Издержки и прибыль продавцов на розничном рынке

За единицу времени совокупный посредник приобрел на оптовом рынке n единиц товаров, причем структура его покупки имела вид $\vec{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$. Все это количество товаров было продано (также за единицу времени) на розничном рынке совокупному покупателю. Ценность и стоимость суммарного товара и излишек потребителя для совокупного покупателя на розничном потребительском рынке обозначим соответственно U , V и W (см. таблицу).

Таблица 1

Характеристики субъектов товарно-денежного обмена

	Полезность (ценность)	Издержки (затраты)	Мера выгоды	Удельные издержки
Совокупный покупатель	U	V	W	$p = V / n$
Продавцы на розничном рынке	V	$\Omega(n) = \tilde{V}(n) + \bar{V}(n)$	$P(n) = V(n) - \Omega(n)$	$\omega = \Omega / n$
Покупатели - оптовики	\tilde{U}	$\tilde{V}(n)$	$\tilde{W} = \tilde{U}(n) - \tilde{V}(n)$	$\tilde{p} = \tilde{V} / n$
Производители	\tilde{V}	$S = \tilde{S}(n) + \bar{S}$	$\tilde{P} = \tilde{V}(n) - S(n)$	$s = S / n$

Сразу подчеркнем, что вторая и третья строки таблицы 1 относятся к одному и тому же субъекту экономической деятельности – совокупному посреднику. Его издержки $\Theta(n)$ равны сумме стоимости (уже оплаченного

на оптовом рынке) товара $\tilde{V}(n)$ и собственных затрат $\Omega(n)$ (транспортировка и хранение товаров, налоги, аренда помещений, зарплата работникам и пр.) Суммарно мера выгоды $\Upsilon(n)$ для совокупного оптовика равна сумме прибыли $P(n)$ от розничной торговли и излишка потребителя $\tilde{W}(n)$ (который он получил при покупке товаров на оптовом рынке). Итоговая ценность $\Psi(n)$ совокупного товара для посредника составляет сумму его меры выгоды и полных издержек.

Наша задача состоит в определении функционального вида связей между характеристиками потребления и торговли теперь уже для розничного рынка.

Итоговая ценность $\Psi(n)$ товара для оптовика может быть представлена в виде $\Psi = \Theta + \Upsilon \Leftrightarrow V(n) + \tilde{U}(n) = (\Omega + \tilde{V}) + (P + \tilde{W}) = \Omega + P + \tilde{U} \Rightarrow$

$$P(n) = V(n) - \Omega(n). \quad (5.1)$$

Удельные издержки оптовика при продаже j -го товара равны

$$\omega_j = \Omega_j/n_j. \quad (5.2)$$

Критерий максимизации прибыли продавца j -го товара правомерно записать в виде

$$P_j = V_j - \omega_j n_j = \max(n_j); \quad \omega_j = \text{const}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.3)$$

Удельные затраты ω_j продавца j -го товара мы, как и ранее, считаем постоянной величиной *только для данной (достаточно малой) единицы времени*.

Из требования (5.3) следуют условия вида

$$(\forall j: \partial V_j / \partial n_j = \omega_j) \wedge (\partial^2 V_j / \partial n_j^2 < 0). \quad (5.4)$$

Из требований (5.4) следуют условия вида

$$\forall j: V_j = \int_0^{\zeta_j} \Omega(x) dx = \zeta_j \Omega(\zeta_j) - \lim_{\zeta_j \rightarrow 0} [\zeta_j \Omega(\zeta_j)] - \int_0^{\zeta_j} x d\Omega(x). \quad (5.5)$$

Поскольку $V_j = U_j - W_j$ ($j = \overline{1, m}$), то в качестве гипотезы примем условия вида

$$U_j = \zeta_j \Omega(\zeta_j) - \lim_{\zeta_j \rightarrow 0} [\zeta_j \Omega(\zeta_j)]; \quad j = \overline{1, m}; \quad (5.6)$$

$$W_j = \int_0^{\zeta_j} x d\Omega(x); \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.7)$$

Нам *предстоит математически обосновать эту гипотезу*.

Из требований (1.9) следует линейный вид функции $W(\vec{n})$. В самом деле, можно записать:

$$W_j = C_j + \bar{p} (n_j - \bar{n}_j); \quad \frac{\partial C_j}{\partial \zeta_j} = 0 \neq \frac{\partial C_j}{\partial \zeta_k}; \quad k \neq j; \quad j = \overline{1, m}. \quad (5.8)$$

Предполагая, что функция потребительского излишка имеет аддитивный характер и учитывая априорную симметрию функции $W(\vec{n})$ по всем аргументам (товарам), находим:

$$W(\vec{n}) = \sum_j^m W_j = \bar{p} \sum_j^m (n_j - \bar{n}_j) = \bar{p} (n - \bar{n}), \bar{n} = \sum_j^m \bar{n}_j. \quad (5.9)$$

6. Характеристики розничного потребительского рынка

Исходя из выражения (5.9), критерий (1.8) можно записать в виде

$$\tilde{L}^*(\vec{n}) = \sum_j^m \int_0^{\zeta_j} x d\Omega(x) + \bar{p}n - \bar{p} \sum_j^m \bar{n}_j e^{\zeta_j} = \max \zeta_j; \bar{p} = const, \vec{n} \in \mathfrak{R}_m^{\oplus}. \quad (6.1)$$

Откуда следует:

$$d\Omega_j/d\zeta_j = \bar{p}\bar{n}_j e^{\zeta_j}/\zeta_j \Rightarrow \Omega_j = \bar{p}\bar{n}_j \int_{-\infty}^{\zeta_j} e^x \frac{dx}{x} \triangleq \bar{p}\bar{n}_j Ei(\zeta_j), \quad (6.2)$$

где интегральная показательная функция имеет вид $Ei(x) = \int_{-\infty}^x e^t \frac{dt}{t}$, [20, п. VI.1.1], а интеграл понимается как его главное значение в смысле Коши.

Для приложений немаловажно, что функция $Ei(x)$ при $x > 0$ представима (относительно быстро сходящимся) рядом [20, п. VI.1] вида

$$Ei(x) = \bar{E} + \ln(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} x^k / (k k!),$$

где $\bar{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sum_{k=1}^n (1/k) - \ln(n)] \cong 0,577\ 215\ 665 \dots$ – константа Эйлера [20].

Из этого выражения, учитывая соотношение (6.2), легко заметить, что постоянные (не зависящие от объема продаж) издержки совокупного оптовика при продаже j -го товара имеют вид $\bar{\Omega}_j = \bar{p}\bar{n}_j \bar{E}$ ($j = \overline{1, m}$).

Вычислим, используя правило Лопиталья, важный предел:

$$\begin{aligned} \lim [xEi(x)] &= \lim \frac{Ei(x)}{x^{-1}} = \lim \frac{e^x/x}{-1/x^2} = \\ &= \lim \frac{-x}{e^{-x}} = \lim (e^x) = (1, \text{если } x \rightarrow 0) \wedge (0, \text{если } x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ценность j -го товара, с учетом соотношения (5.6) и (6.3), равна

$$U_j = \bar{p}\bar{n}_j \zeta_j Ei(\zeta_j) - \bar{p}\bar{n}_j; j = \overline{1, m}. \quad (6.4)$$

Стоимость j -го товара имеют вид

$$V_j = U_j - W_j = \bar{p}\bar{n}_j \zeta_j Ei(\zeta_j) - \bar{p}\bar{n}_j. \quad (6.5)$$

С другой стороны, для V_j получаем выражение вида

$$\begin{aligned} V_j &= \bar{p}\bar{n}_j \int_0^{\zeta_j} dx \int_{-\infty}^x e^t dt/t = \bar{p}\bar{n}_j [xEi(x)]_0^{\zeta_j} - \bar{p}\bar{n}_j \int_0^{\zeta_j} e^x dx = \\ &= \bar{p}\bar{n}_j [\zeta_j Ei(\zeta_j) - 1 - e^{\zeta_j} + 1] = \bar{p}\bar{n}_j \zeta_j Ei(\zeta_j) - \bar{p}\bar{n}_j = \zeta_j \Omega_j - \bar{p}\bar{n}_j. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Соотношения (6.5) и (6.6) эквивалентны. Это доказывает, что сделанная нами гипотеза (5.6-7) верна. Из двух различных и невзаимосвязанных предпосылок (КМВ и критерия максимума прибыли совокупного продавца) получены одинаковые выражение для величины стоимости j -го товара $V(\zeta_j)$.

Розничная цена j -го товара выражается в виде:

$$p_j = \bar{p}\bar{n}_j \zeta_j Ei(\zeta_j) / n_j - \bar{p} = \omega_j \zeta_j - \bar{p}; j = \overline{1, m}. \quad (6.7)$$

Несложно посчитать, что производная розничной цены j -го товара по его потреблению имеет вид: $dp_j/dn_j = - (V_j - \Omega_j)/n_j^2 = - P_j/n_j^2 < 0$.

И, наконец, для определения вида функции потребительского излишка при покупке j -го товара используем выражение (5.7):

$$W_j = \bar{p}\bar{n}_j \int_0^{\zeta_j} e^x dx = \bar{p}\bar{n}_j e^{\zeta_j} - \bar{p}\bar{n}_j = \bar{p}(n_j - \bar{n}_j). \quad (6.8)$$

Совпадение результатов (6.8) и (5.9) служит еще одним доказательством правомерности гипотезы (5.6-7). Прибыль продавца j -го товара равна (с учетом (6.2) и (6.6))

$$P_j = V_j - \Omega_j = \bar{p}\bar{n}_j(\zeta_j - 1)Ei(\zeta_j) - \bar{p}n_j; \quad j = \overline{1, m}. \quad (6.9)$$

Замечание. Введем новые переменные вида:

$$\xi_j = n_j/\bar{n}_j > 1 \Rightarrow \zeta_j = \ln \xi_j > 0 \Rightarrow \Delta \xi_j = \Delta n_j/\bar{n}_j; \quad j = \overline{1, m}.$$

При $\xi_j > 1$ справедливо соотношение [20, п. VI.1.2] вида

$$Ei(\zeta_j) = Li(\xi_j) = \int_0^{\xi_j} dx/\ln x, \quad \xi_j > 1; \quad j = \overline{1, m}.$$

где $Li(x) = \int_0^x dt/\ln t$ ($x > 0$) – функция интегрального логарифма. Эти соотношения позволяют излагать материал о розничных рынках не только в терминах интегральных показательных функций, но и используя интегральные логарифмы, как это было сделано в работах [11; 9].

Заключение

В основу модели положено *торговое взаимодействие трех субъектов* товарно-денежного обмена: (а) производители, которые на оптовом рынке выступают в роли продавцов; (б) совокупный покупатель розничного потребительского рынка и (в) посредник, который на оптовом рынке является совокупным потребителем, а на розничном – совокупным продавцом.

Потребление на розничном рынке рассматривается как наблюдение совокупного спроса. Потребительская розничная цена рассматривается как среднестатистическое отношение стоимости товара, купленного за единицу времени, к его количеству. Розничная цена по смыслу совпадает с равновесной ценой (при традиционном изложении теории потребления).

Ключевую роль в получении результатов сыграл *постулат об измеримости совокупного спроса на многотоварном рынке.* Предложение продавца в работе не рассматривалось, во-первых, за ненадобностью, и, во-вторых, в той связи, что эта характеристика – *неизмеримая* величина.

Состояние (значения характеристик) потребительского рынка определено совокупным спросом покупателей, качеством товаров и затратами производителей и продавцов товаров, представленных на рынке. Используя критерии оптимизации структуры совокупной покупки (для розничного и оптового рынков они различны) и условие максимума прибыли (продавцов и производителей), были получены *универсальные количественные выражения* для характеристик производства, торговли и потребления.

Дальнейшее развитие предложенного подхода к количественному анализу взаимосвязей между характеристиками производства, торговли и потребления требует надежной эмпирической базы (статистических и отчетных данных). К сожалению, ныне российской экономической отчетности верить можно лишь с большими оговорками. Что делает задачу создания надежной и достоверной системы Росстата важнейшей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jevons W.S.* Brief of a general mathematical theory of political economy // Journal of the Statistical Society of London. 1866. XXIX. № 2.
2. Эконометрия // Большая Советская Энциклопедия, т.29. М.: изд. «Советская Энциклопедия», 1978 (<http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/153166/Эконометрия>).
3. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. В 2-х т. М.: Юнити, 2001.
4. *Jevons W.S.* Notice of a general mathematical theory of political economy. British Assoc. For the Advancement of Science // Report of the 32 Meeting Transaction of the Sections. 1862. L.J. Murray.
5. *Viner J.* Cost curves and supply curves // Readings in Price Theory. Homewood, 1952.
6. *Энджел Дж.Ф, Блэкуэл Р.Д, Миниард П.У.* Поведение потребителей. / Пер. с англ. С.-Пб.: Питер, 2000.
7. *Черепанов Е.В.* Стохастическое описание выборочного метода // Социология: методология, методы, математическое моделирование. 2007. №25.

8. *Черепанов Е.В.* Стохастические методы анализа данных выборочных маркетинговых и социальных обследований // Прикладная эконометрика. 2011. № 2(22).
9. *Черепанов Е.В.* Нетрадиционные вероятностно-статистические методы для социально-экономических и социологических исследований. М.: Спутник+, 2012.
10. *Черепанов Е.В.* Математическое моделирование неоднородных совокупностей экономических данных. М.: Госуниверситет экономики, статистики и информатики (МЭСИ), 2013.
11. *Черепанов Е.В.* К вопросу описания количественных взаимосвязей между категориями потребления и производства // Гуманитарные и социальные науки. Электронный научный журнал. 2012. № 2 (http://hses-online.ru/2012/02/22_00_01/33.pdf).
12. *Черепанов Е.В.* О количественном описании монопольного потребительского рынка. // Гуманитарные и социальные науки. Электронный научный журнал. 2013. № 1 (http://www.hses-online.ru/2013/01/08_00_05/12.pdf).
13. *Черепанов Е.В.* Математическое описание многотоварного потребительского рынка. // «Научная дискуссия: вопросы экономики и управления». Материалы XI Международной научно-практической конференции. М.: Международный центр науки и образования. 2013.
14. *Dupuit J.* De la mesure de l'utilite des travaux publics // Annales des ponts et chaussées. 1844. VIII, ser. 2.
15. *Черепанов Е.В.* Критерии оптимизации структуры потребления на много-варных рынках // Математико-статистический анализ социально-экономических процессов. Межвузовский сборник научных трудов, вып. 10. М.: Госуниверситет экономики, статистики и информатики (МЭСИ), 2013.
16. *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* Микроэкономика / Пер. с англ. М.: Дело, 2000.
17. *Уайльд Д.* Методы поиска экстремума / Пер. с англ. М.: Наука, 1967.
18. *Simon H.* Theories of decision-making in economics and behavioral science // Microeconomics: Selected Reading. Ed. by E. Mansfield. N.Y., 1971.

19. *Зайцев Ф.В., Полянский А.Д.* Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997.
20. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции / Пер. с нем. М.: Наука, 1977.

REFERENCES

1. *Jevons W.S.* Brief of a general mathematical theory of political economy // Journal of the Statistical Society of London. 1866. XXIX. Number 2.
2. Econometrics // The Great Soviet Encyclopedia. V.29. M. Ed. "Sovetskaya Entsiklopedia", 1978 (<http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/153166/Эконометрия>).
3. *Aivazyan S.A., Mkhitaryan V.S.* Applied Statistics and Econometrics basis. In 2 Vols: Unity, 2001.
4. *Jevons W.S.* Notice of a general mathematical theory of political economy. British Assoc. For the Advancement of Science // Report of the 32 Meeting Transaction of the Sections. 1862. L.J. Murray.
5. *Viner J.* Cost curves and supply curves // Readings in Price Theory. Homewood, 1952.
6. *Angel Dzh.F, Blekuel R.D, Miniard PW* Consumer behavior. / Per. from English. Pb: Peter, 2000.
7. *Cherepanov E.V.* Stochastic description of the sampling method // Sociology: methodology, methods, mathematical modeling. 2007. N25.
8. *Cherepanov E.V.* Stochastic methods of data analysis of selected marketing and social research // Journal of Applied Econometrics. 2011. N 2 (22).
9. *Cherepanov E.V.* Non-traditional probable and statistical methods for the socio-economic and sociological research. Moscow, 2012.
10. *Cherepanov E.V.* Mathematical modeling of heterogeneous sets of economic data. Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI), 2013.
11. *Cherepanov E.V.* On the quantitative description of the relationship between the categories of consumption and production // Humanities and

- Social Sciences. 2012. No 2 (http://hses-online.ru/2012/02/22_00_01/33.pdf).
12. *Cherepanov E.V.* On the quantitative description of the monopoly of the consumer market. // Humanities and Social Sciences. 2013. No 1 (http://www.hses-online.ru/2013/01/08_00_05/12.pdf).
 13. *Cherepanov E.V.* The mathematical description of multi-goods consumer market // The scientific debate: issues of economics and management. Materials XI of the International Scientific and Practical Conference. Moscow: International Centre for Science and education. 2013.
 14. *Dupuit J.* De la mesure de l'utilite des travaux publics // Annales des ponts et chaussées. 1844. VIII, ser. 2.
 15. *Cherepanov E.V.* Criteria for optimizing the structure of consumption-multipoint commodity markets // Mathematical and statistical analysis of the socio-economic processes. Interuniversity collection of scientific works, Vol. 10. Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI), 2013.
 16. *Pindyck R. D.* Rubinfeld Microeconomics / Transl. from English. M: Business, 2000.
 17. *Wilde J.* Methods of extremum / Transl. from English. Moscow: Nauka, 1967.
 18. *Simon H.* Theories of decision-making in economics and behavioral science // Microeconomics: Selected Reading. Ed. by E. Mansfield. N.Y., 1971.
 19. *Zaitsev F.V., Polanski A.D.* Handbook of linear ordinary differential equations. Faktorial, 1997.
 20. *Jahnke E., Emde F., Lesch F.* Special Features / Transl. from German. Moscow: Nauka, 1977.

Независимый Центр

технико-экономических исследований. г. Москва, Россия 24 июня 2013 г.